

# Grundlagen der Statistik: Der Satz von Bayes

Originalartikel

Backup

<html> <a href=„<https://wissenschafts-thurm.de/grundlagen-der-statistik-der-satz-von-bayes/>“><img width=„150“ height=„150“ src=„<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe-150x150.jpg>“ class=„attachment-thumbnail size-thumbnail wp-post-image“ alt=„“ srcset=„<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe-150x150.jpg> 150w, <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe-300x300.jpg> 300w, <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe-768x768.jpg> 768w, <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe-590x590.jpg> 590w, <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe.jpg> 870w“ sizes=„(max-width: 150px) 100vw, 150px“/></a><p>Angenommen, es existiere ein Test auf das Vorhandensein eines genetischen Merkmals, das im hohen Alter eine bestimmte schwere Erkrankung auslöst. Dieser Test identifiziert das Merkmal, das bei 5% der Bevölkerung auftritt, mit einer Sicherheit von 95%. Im Rahmen einer Massenuntersuchung werden 100.000 Personen getestet. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine als Träger des Merkmals identifizierte Person wirklich über das Merkmal verfügt? Die meisten Menschen würden diese Frage spontan mit 95% beantworten schlielich ist ja der Test zu 95% sicher, also wird es auch das Ergebnis sein. Der Irrtum, dem wir dabei kollektiv unterliegen, ist die völlige Vernachlässigung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das (mit 5% ja eher seltene) Merkmal überhaupt bei dieser Testperson vorliegt.</p> <p>Die reale Wahrscheinlichkeit für einen Treffer erschließt man sich am besten durch die Betrachtung der absoluten Häufigkeiten:</p> <p><img class=„alignnone size-full wp-image-3518“ src=„<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Baumdiagramm.png>“ alt=„Baumdiagramm“ width=„1378“ height=„683“ srcset=„<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Baumdiagramm.png> 1378w, <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Baumdiagramm-300x149.png> 300w, <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Baumdiagramm-768x381.png> 768w, <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Baumdiagramm-1024x508.png> 1024w“ sizes=„(max-width: 1378px) 100vw, 1378px“/></p> <p>Von 100.000 Testpersonen verfügen 5% wirklich über das Merkmal chließlich das sind 5.000 Personen. Von diesen 5.000 Personen werden chließlich da der Test zu 95% sicher ist chließlich insgesamt 4.750 Personen korrekt erkannt. Da der Test, wenn er zu 95% sicher ist, auch mit 5% irrt, werden von den 95.000 gesunden Testpersonen allerdings auch 5% chließlich dies entspricht ebenfalls 4.750 Personen chließlich als Merkmalsträger eingestuft. Alles in allem sind den Testergebnissen zufolge also  $4.750 + 4.750 = 9.500$  Personen Merkmalsträger, von denen allerdings nur 4.750 Personen (50%) wirklich das Merkmal aufweisen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person wirklich das Merkmal aufweist, wenn der Test sie als Merkmalsträger identifiziert, liegt somit nur bei 50% chließlich auch wenn der Test selbst zu 95% sicher ist.</p> <p><ins class=„adsbygoogle c1“ data-ad-format=„fluid“ data-ad-layout-key=„ek+6d+d-di+nb“ data-ad-client=„ca-pub-5654419668878242“ data-ad-slot=„7673241660“/></p> <p>Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit errechnet sich also dadurch, dass man entsprechend der <a href=„[http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/033\\_Laplace.html](http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/033_Laplace.html)“ target=„\_blank“ rel=„noopener“>klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition nach Laplace</a> die Summe der für das betrachtete Ergebnis relevanten Fälle (Testpersonen mit Merkmal, bei denen das Merkmal diagnostiziert wurde) zu allen Fällen (Testpersonen mit oder ohne

Merkmal, bei denen das Merkmal diagnostiziert wurde) in Beziehung setzt. Der Ersatz der absoluten Werte durch die Wahrscheinlichkeiten &#8211; unter Ber&#252;cksichtigung von Additions- und Multiplikationssatz &#8211; f&#252;hrt zum gleichen&#160;Ergebnis:  $(0,05 * 0,95) / {}^1 = 0,50.$



Aus dieser &#220;berlegung lässt sich der sowohl f&#252;r das Verständnis der Wahrscheinlichkeitslehre als auch vieler Alltagsprobleme hochgeradig relevante [Satz von Bayes](https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Bayes) ableiten:



Wie aber ist diese Formel richtig zu lesen?



Eine Darstellung des &#8220;ber&#252;hmtesten&#8221; Beispiels zum Satz von Bayes &#8211; des sogenannten Taxi-Problems des deutschen Mathematikers Arthur Engel &#8211; findet sich &#252;brigens [hier in meinem Blog auf ScienceBlogs.de](http://scienceblogs.de/frischer-wind/2008/12/05/das-taxiproblem/).

**Beispielrechnung**

Eine Hochschule pr&#252;ft studentisch eingereichten Bachelor-Arbeiten mit einer eigens entwickelten Software auf Plagiate. Diese werden von der Software mit einer Sicherheit von 95% korrekt erkannt. Jedes Semester reichen 800 Studierende an dieser Hochschule Bachelor-Arbeiten zur Kontrolle ein, wobei leider davon auszugehen ist, dass in 3% der eingereichten Arbeiten Plagiate enthalten sind.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine durch die Software als plagiatsverdächtig identifizierte Arbeit auch tatsächlich ein Plagiat enthält?

Von 800 eingereichten Bachelor-Arbeiten enthalten 776 keine Plagiate (97%)  
24 Plagiate (3%)

Von 776 Arbeiten ohne Plagiate werden 737,2 korrekterweise als sauber klassifiziert (95%)  
38,8 werden 38,8 falschlicherweise als unsauber klassifiziert (5%)

Von 24 Arbeiten mit Plagiaten werden 22,8 korrekterweise als unsauber klassifiziert (95%)  
1,2 werden 1,2 falschlicherweise als sauber klassifiziert (5%)

Insgesamt werden also  $38,8 + 22,8 = 61,6$  Arbeiten als Plagiate eingestuft. Von diesen 61,6 Arbeiten sind aber nur 22,8 Arbeiten wirklich Plagiate. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine als plagiatsverdächtig eingestufte Arbeit auch tatsächlich ein Plagiat enthält,

liegt somit bei lediglich 37,01%. Eine Sicherheitssoftware führt die Analyse von Videoaufnahmen an einer Flughafen-Sicherheitsschleuse kann das Gesicht von gesuchten Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von 92% erkennen. Allerdings identifiziert die Software in 3% aller Fälle eine nicht gesuchte Person irrtümlich als gesucht. Die Sicherheitsbedürfnisse gehen davon aus, dass an einem bestimmten Tag eine Gruppe von 10 gesuchten Personen versuchen wird, die Schleuse zu passieren. Das Personenaufkommen pro Tag liegt bei 10.000 Fluggästen. Mit der Präsenz weiterer gesuchter Personen ist am betrachteten Tag nicht zu rechnen.

a) Mit wie vielen Fällen schlicherweise als gesucht identifizierten Personen ist zu rechnen?

b) Die Software schlägt Alarm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass tatsächlich eine gesuchte Person entdeckt wurde?

Zur Anzeige der Lösungen bitte [hier klicken](https://wissenschafts-thurm.de/uebungsaufgaben-mit-musterloesungen-zur-statistik-der-satz-von-bayes/).

Die hier vorgestellten Inhalte und Aufgaben sind Teil der Vorlesung "Grundlagen der Statistik"; im Bachelor-Studiengang Betriebswirtschaftslehre an der Hochschule Harz. Eine vollständige Übersicht aller Inhalte dieser Vorlesung im Wissenschafts-Thurm findet sich hier: [Grundlagen der Statistik](https://wissenschafts-thurm.de/grundlagen-der-statistik/).

Um die Inhalte auf Twitter zu teilen, klicken Sie auf den entsprechenden Button:

Bei Twitter teilen

Um die Inhalte auf Facebook zu teilen, klicken Sie auf den entsprechenden Button:

Bei Facebook teilen

Um die Inhalte auf Google+ zu teilen, klicken Sie auf den entsprechenden Button:

Bei Google+ teilen

1.6v0l2.9-2.9c-1.8-1.7-4.2-2.7-7-2.7-5.8 0-10.4 4.7-10.4 10.4s4.7 10.4 10.4 10.4c6 0 10-4.2 10-10.2  
0-0.8-0.1-1.5-0.2-2.2 0 0-9.8 0-9.8 0z"/></svg>teilen&#160;</a></li> <li class=„shariff-button linkedin shariff-nocustomcolor c9“><a href=„<https://www.linkedin.com/shareArticle?mini=true&url=https%3A%2F%2Fwissenschafts-thurm.de%2Fgrundlagen-der-statistik-der-satz-von-bayes%2F&title=Grundlagen%20der%20Statistik%3A%20Der%20Satz%20von%20Bayes>“ title=„Bei LinkedIn teilen“ aria-label=„Bei LinkedIn teilen“ role=„button“ rel=„noopener noreferrer“ class=„shariff-link c8“ target=„\_blank“><svg width=„32px“ height=„20px“ xmlns=„<http://www.w3.org/2000/svg>“ viewbox=„0 0 27 32“><path fill=„#0077b5“ d=„M6.2 11.2v17.7h-5.9v-17.7h5.9zM6.6 5.7q0 1.3-0.9 2.2t-2.4 0.9h0q-1.5 0-2.4-0.9t-0.9-2.2 0.9-2.2 2.4-0.9 2.4 0.9 0.9 2.2zM27.4 18.7v10.1h-5.9v-9.5q0-1.9-0.7-2.9t-2.3-1.1q-1.1 0-1.9 0.6t-1.2 1.5q-0.2 0.5-0.2 1.4v9.9h-5.9q0-7.1 0-11.6t0-5.3l0-0.9h5.9v2.6h0q0.4-0.6 0.7-1t1-0.9 1.6-0.8 2-0.3q3 0 4.9 2t1.9 6z“/></svg>mitteilen&#160;</a></li> <li class=„shariff-button whatsapp shariff-nocustomcolor shariff-mobile c11“><a href=„whatsapp:send?text=Grundlagen%20der%20Statistik%3A%20Der%20Satz%20von%20Bayes%20https%3A%2F%2Fwissenschafts-thurm.de%2Fgrundlagen-der-statistik-der-satz-von-bayes%2F“ title=„Bei Whatsapp teilen“ aria-label=„Bei Whatsapp teilen“ role=„button“ rel=„noopener noreferrer“ class=„shariff-link c10“ target=„\_blank“><svg width=„32px“ height=„20px“ xmlns=„<http://www.w3.org/2000/svg>“ viewbox=„0 0 32 32“><path fill=„#34af23“ d=„M17.6 17.4q0.2 0 1.7 0.8t1.6 0.9q0 0.1 0 0.3 0 0.6-0.3 1.4-0.3 0.7-1.3 1.2t-1.8 0.5q-1 0-3.4-1.1-1.7-0.8-3-2.1t-2.6-3.3q-1.3-1.9-1.3-3.5v-0.1q0.1-1.6 1.3-2.8 0.4-0.4 0.9-0.4 0.1 0 0.3 0t0.3 0q0.3 0 0.5 0.1t0.3 0.5q0.1 0.4 0.6 1.6t0.4 1.3q0 0.4-0.6 1t-0.6 0.8q0 0.1 0.1 0.3 0.6 1.3 1.8 2.4 1 0.9 2.7 1.8 0.2 0.1 0.4 0.1 0.3 0 1-0.9t0.9-0.9zM14 26.9q2.3 0 4.3-0.9t3.6-2.4 2.4-3.6 0.9-4.3-0.9-4.3-2.4-3.6-2.4-4.3-0.9-4.3 0.9-3.6 2.4-2.4 3.6-0.9 4.3q0 3.6 2.1 6.6l-1.4 4.2 4.3-1.4q2.8 1.9 6.2 1.9zM14 2.2q2.7 0 5.2 1.1t4.3 2.9 2.9 4.3 1.1 5.2-1.1 5.2-2.9 4.3-4.3 2.9-5.2 1.1q-3.5 0-6.5-1.7l-7.4 2.4 2.4-7.2q-1.9-3.2-1.9-6.9 0-2.7 1.1-5.2t2.9-4.3 4.3-2.9 5.2-1.1z“/></svg>teilen&#160;</a></li> <li class=„shariff-button xing shariff-nocustomcolor c13“><a href=„[https://www.xing.com/social\\_plugins/share?url=https%3A%2F%2Fwissenschafts-thurm.de%2Fgrundlagen-der-statistik-der-satz-von-bayes%2F](https://www.xing.com/social_plugins/share?url=https%3A%2F%2Fwissenschafts-thurm.de%2Fgrundlagen-der-statistik-der-satz-von-bayes%2F)“ title=„Bei XING teilen“ aria-label=„Bei XING teilen“ role=„button“ rel=„noopener noreferrer“ class=„shariff-link c12“ target=„\_blank“><svg width=„32px“ height=„20px“ xmlns=„<http://www.w3.org/2000/svg>“ viewbox=„0 0 25 32“><path fill=„#126567“ d=„M10.7 11.9q-0.2 0.3-4.6 8.2-0.5 0.8-1.2 0.8h-4.3q-0.4 0-0.5-0.3t0-0.6l4.5-8q0 0 0 0l-2.9-5q-0.2-0.4 0-0.7 0.2-0.3 0.5-0.3h4.3q0.7 0 1.2 0.8zM25.1 0.4q0.2 0.3 0 0.7l-9.4 16.7 6 11q0.2 0.4 0 0.6-0.2 0.3-0.6 0.3h-4.3q-0.7 0-1.2-0.8l-6-11.1q0.3-0.6 9.5-16.8 0.4-0.8 1.2-0.8h4.3q0.4 0 0.5 0.3z“/></svg>teilen&#160;</a></li> <li class=„shariff-button info shariff-nocustomcolor c15“><a href=„<http://ct.de/-2467514>“ title=„Weitere Informationen“ aria-label=„Weitere Informationen“ role=„button“ rel=„noopener noreferrer“ class=„shariff-link c14“ target=„\_blank“><svg width=„32px“ height=„20px“ xmlns=„<http://www.w3.org/2000/svg>“ viewbox=„0 0 11 32“><path fill=„#999“ d=„M11.4 24v2.3q0 0.5-0.3 0.8t-0.8 0.4h-9.1q-0.5 0-0.8-0.4t-0.4-0.8v-2.3q0-0.5 0.4-0.8t0.8-0.4h6.8q0.5 0 0.8 0.4t0.4 0.4-0.8t0.8-0.4h1.1v-6.8h-1.1q-0.5 0-0.8-0.4t-0.4-0.8v-2.3q0-0.5 0.4-0.8t0.8-0.4h6.8q0.5 0 0.8 0.4t0.4 0.8v10.3h1.1q0.5 0 0.8 0.4t0.3 0.8zM9.2 3.4v3.4q0 0.5-0.4 0.8t-0.8 0.4h-4.6q-0.4 0-0.8-0.4t-0.4-0.8v-3.4q0-0.4 0.4-0.8t0.8-0.4h4.6q0.5 0 0.8 0.4t0.4 0.8z“/></svg>info&#160;</a></li> </ul></div> </html>

1)

0,05\*0,95) + (0,95\*0,05

From:  
<https://schnipsl.qgelm.de/> - **Qgelm**

Permanent link:  
[https://schnipsl.qgelm.de/doku.php?id=wallabag:grundlagen-der-statistik\\_-der-satz-von-bayes](https://schnipsl.qgelm.de/doku.php?id=wallabag:grundlagen-der-statistik_-der-satz-von-bayes)

Last update: **2021/12/06 15:24**

