

# Grundlagen der Statistik: Der Satz von Bayes

[Originalartikel](#)

[Backup](#)

 <https://wissenschafts-thurm.de/grundlagen-der-statistik-der-satz-von-bayes/>

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe-150x150.jpg>

 alt=""

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe-150x150.jpg> 150w,

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe-300x300.jpg> 300w,

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe-768x768.jpg> 768w,

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe-590x590.jpg> 590w,

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2016/09/Stichprobe.jpg> 870w" sizes="(max-width: 150px) 100vw, 150px"/></a><p>Angenommen, es existiere ein Test auf das Vorhandensein eines genetischen Merkmals, das im hohen Alter eine bestimmte schwere Erkrankung ausl&#246;st. Dieser Test identifiziert das Merkmal, das bei 5% der Bev&#246;lkerung auftritt, mit einer Sicherheit von 95%. Im Rahmen einer Massenuntersuchung werden 100.000 Personen getestet. Wie gro&#223; ist nun die Wahrscheinlichkeit daf&#252;r, dass eine als Tr&#228;ger des Merkmals identifizierte Person wirklich &#252;ber das Merkmal verf&#252;gt? Die meisten Menschen w&#252;rden diese Frage spontan mit 95% beantworten &#8211; schlie&#223;lich ist ja der Test zu 95% sicher, also wird es auch das Ergebnis sein. Der Irrtum, dem wir dabei kollektiv unterliegen, ist die v&#246;llige Vernachl&#228;ssigung der Wahrscheinlichkeit daf&#252;r, dass das (mit 5% ja eher seltene) Merkmal &#252;berhaupt bei dieser Testperson vorliegt.</p><p>Die reale Wahrscheinlichkeit f&#252;r einen Treffer erschlie&#223;t man sich am besten durch die Betrachtung der absoluten H&#228;ufigkeiten:</p><p><img alt="Thumbnail image of a document page" data-bbox="68 520 735 537"/> class="alignnone size-full wp-image-3518"

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Baumdiagramm.png>

 alt="Baumdiagramm" width="1378" height="683"

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Baumdiagramm.png> 1378w,

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Baumdiagramm-300x149.png> 300w,

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Baumdiagramm-768x381.png> 768w,

 <https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Baumdiagramm-1024x508.png> 1024w" sizes="(max-width: 1378px) 100vw, 1378px"/></p><p>Von 100.000 Testpersonen verf&#252;gen 5% wirklich &#252;ber das Merkmal &#8211; das sind 5.000 Personen. Von diesen 5.000 Personen werden &#8211; da der Test zu 95% sicher ist &#8211; insgesamt 4.750 Personen korrekterweise als Merkmalstr&#228;ger erkannt. Da der Test, wenn er zu 95% sicher ist, auch mit 5% irrt, werden von den 95.000 gesunden Testpersonen allerdings auch 5% &#8211; dies entspricht ebenfalls 4.750 Personen &#8211; f&#228;lschlicherweise als Merkmalstr&#228;ger eingestuft. Alles in allem sind den Testergebnissen zufolge also 4.750 + 4.750 = 9.500 Personen Merkmalstr&#228;ger, von denen allerdings nur 4.750 Personen (50%) wirklich das Merkmal aufweisen. Die Wahrscheinlichkeit daf&#252;r, dass eine Person wirklich das Merkmal aufweist, wenn der Test sie als Merkmalstr&#228;ger identifiziert, liegt somit nur bei 50% &#8211; auch wenn der Test selbst zu 95% sicher ist.</p><p><ins class="adsbygoogle c1" data-ad-format="fluid" data-ad-layout-key=",-ek+6d+d-di+nb" data-ad-client="ca-pub-5654419668878242" data-ad-slot="7673241660"/></p><p>Die tats&#228;chliche Wahrscheinlichkeit errechnet sich also dadurch, dass man entsprechend der <a href="http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/033\_Laplace.html" target="\_blank" rel="noopener">klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition nach Laplace</a> die Summe der f&#252;r das betrachtete Ergebnis relevanten F&#228;lle (Testpersonen mit Merkmal, bei denen das Merkmal diagnostiziert wurde) zu allen F&#228;llen (Testpersonen mit oder ohne

Merkmal, bei denen das Merkmal diagnostiziert wurde) in Beziehung setzt. Der Ersatz der absoluten Werte durch die Wahrscheinlichkeiten &#211; unter Ber&#252;cksichtigung von Additions- und Multiplikationssatz &#211; f&#252;hrt zum gleichen&#160;Ergebnis:  $(0,05 \cdot 0,95) / ^1 = 0,50.$

<p><img class=„alignnone wp-image-3554“

src=„<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Bayes-Beispiel.png>“ alt=„Beispiel zum Satz von Bayes“ width=„500“ height=„117“

srcset=„<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Bayes-Beispiel.png> 873w,

<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Bayes-Beispiel-300x70.png> 300w,

<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Bayes-Beispiel-768x180.png> 768w“

sizes=„(max-width: 500px) 100vw, 500px“/></p> <p>Aus dieser &#220;berlegung l&#228;sst sich

der sowohl f&#252;r das Verst&#228;ndnis der Wahrscheinlichkeitslehre als auch vieler

Alltagsprobleme hochgeradig relevante <a href=„[https://de.wikipedia.org/wiki/Satz\\_von\\_Bayes](https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Bayes)“

target=„\_blank“ rel=„noopener“>Satz von Bayes</a> ableiten:</p> <p><img class=„alignnone

size-full wp-image-3505“

src=„<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Satz-von-Bayes.png>“ alt=„Formel

Satz von Bayes“ width=„1032“ height=„248“

srcset=„<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Satz-von-Bayes.png> 1032w,

<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Satz-von-Bayes-300x72.png> 300w,

<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Satz-von-Bayes-768x185.png> 768w,

<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Satz-von-Bayes-1024x246.png> 1024w“

sizes=„(max-width: 1032px) 100vw, 1032px“/></p> <p>Wie aber ist diese Formel richtig zu

lesen?</p> <p><img class=„alignnone size-full wp-image-3511“

src=„<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Satz-von-Bayes-1.png>“ alt=„Satz

von Bayes“ width=„1314“ height=„764“

srcset=„<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Satz-von-Bayes-1.png> 1314w,

<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Satz-von-Bayes-1-300x174.png> 300w,

<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Satz-von-Bayes-1-768x447.png> 768w,

<https://wissenschafts-thurm.de/wp-content/uploads/2017/01/Satz-von-Bayes-1-1024x595.png> 1024w“

sizes=„(max-width: 1314px) 100vw, 1314px“/></p> <p>Eine Darstellung des

&#220;ber&#252;hmtesten&#221; Beispiels zum Satz von Bayes &#211; des sogenannten Taxi-

Problems des deutschen Mathematikers Arthur Engel &#211; findet sich &#252;brigens <a

href=„<http://scienceblogs.de/frischer-wind/2008/12/05/das-taxiproblem/>“ target=„\_blank“

rel=„noopener“>hier in meinem Blog auf ScienceBlogs.de</a>.</p>

<p><strong>Beispielrechnung</strong></p> <p>Eine Hochschule pr&#252;ft s&#228;mtlich

eingereichten Bachelor-Arbeiten mit einer eigens entwickelten Software auf Plagiate. Diese werden

von der Software mit einer Sicherheit von 95% korrekt erkannt. Jedes Semester reichen 800

Studierende an dieser Hochschule Bachelor-Arbeiten zur Kontrolle ein, wobei leider davon

auszugehen ist, dass in 3% der eingereichten Arbeiten Plagiate enthalten sind.</p> <p>Wie

gro&#223; ist die Wahrscheinlichkeit daf&#252;r, dass eine durch die Software als

plagiatsverd&#228;chtig identifizierte Arbeit auch tats&#228;chlich ein Plagiat enth&#228;lt?</p>

<p>Von 800 eingereichten Bachelor-Arbeiten enthalten&#230;</p> <p>&#230; 776 keine

Plagiate (97%)<br/> &#230; 24 Plagiate (3%)</p> <p>Von 776 Arbeiten ohne

Plagiate&#230;</p> <p>&#230; werden 737,2 korrekterweise als sauber klassifiziert (95%)<br/>

&#230; werden 38,8 f&#228;lschlicherweise als unsauber klassifiziert (5%)</p> <p>Von 24

Arbeiten mit Plagiaten&#230;</p> <p>&#230; werden 22,8 korrekterweise als unsauber

klassifiziert (95%)<br/> &#230; werden 1,2 f&#228;lschlicherweise als sauber klassifiziert

(5%)</p> <p>Insgesamt werden also  $38,8 + 22,8 = 61,6$  Arbeiten als Plagiate eingestuft. Von diesen

61,6 Arbeiten sind aber nur 22,8 Arbeiten wirklich Plagiate. Die Wahrscheinlichkeit daf&#252;r, dass

eine als plagiatsverd&#228;chtig eingestufte Arbeit auch tats&#228;chlich ein Plagiat enth&#228;lt,

liegt somit bei lediglich 37,01%.

**Übungsaufgaben**

Eine Sicherheitssoftware für die Analyse von Videoaufnahmen an einer Flughafen-Sicherheitsschleuse kann das Gesicht von gesuchten Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von 92% erkennen. Allerdings identifiziert die Software in 3% aller Fälle eine nicht gesuchte Person irrtümlich als gesucht. Die Sicherheitsbehörden gehen davon aus, dass an einem bestimmten Tag eine Gruppe von 10 gesuchten Personen versuchen wird, die Schleuse zu passieren. Das Personenaufkommen pro Tag liegt bei 10.000 Fluggästen. Mit der Präsenz weiterer gesuchter Personen ist am betrachteten Tag nicht zu rechnen.

a) Mit wie vielen Fällen schlichterweise als „gesucht“ identifizierten Personen ist zu rechnen?

b) Die Software schlägt Alarm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass tatsächlich eine gesuchte Person entdeckt wurde?

adsbygoogle(c1) data-ad-client=„ca-pub-5654419668878242“ data-ad-slot=„1901152186“ data-ad-format=„link“/>

Zur Anzeige der Lösungen bitte  [klicken.](„https://wissenschafts-thurm.de/uebungsaufgaben-mit-musterloesungen-zur-statistik-der-satz-von-bayes/“>hier</a)



Die hier vorgestellten Inhalte und Aufgaben sind Teil der Vorlesung „Grundlagen der Statistik“; im [. Eine vollständige Übersicht aller Inhalte dieser Vorlesung im Wissenschafts-Thurm findet sich hier: \[.\]\(„https://wissenschafts-thurm.de/grundlagen-der-statistik/“>Grundlagen\)](„https://www.hs-harz.de/weiterbildung/“>berufsbegleitenden)

- 
- 
-

1.6v0l2.9-2.9c-1.8-1.7-4.2-2.7-7-2.7-5.8 0-10.4 4.7-10.4 10.4s4.7 10.4 10.4 10.4c6 0 10-4.2 10-10.2 0-0.8-0.1-1.5-0.2-2.2 0 0-9.8 0-9.8 0z"/></svg>teilen&#160;</a></li> <li class=„shariff-button linkedin shariff-nocustomcolor c9“><a href=„https://www.linkedin.com/shareArticle?mini=true&url=https%3A%2F%2Fwissenschafts-thurm.de%2Fgrundlagen-der-statistik-der-satz-von-bayes%2F&title=Grundlagen%20der%20Statistik%3A%20Der%20Satz%20von%20Bayes“ title=„Bei LinkedIn teilen“ aria-label=„Bei LinkedIn teilen“ role=„button“ rel=„noopener nofollow“ class=„shariff-link c8“ target=„\_blank“><svg width=„32px“ height=„20px“ xmlns=„http://www.w3.org/2000/svg“ viewBox=„0 0 27 32“><path fill=„#0077b5“ d=„M6.2 11.2v17.7h-5.9v-17.7h5.9zM6.6 5.7q0 1.3-0.9 2.2t-2.4 0.9h0q-1.5 0-2.4-0.9t-0.9-2.2 0.9-2.2 2.4-0.9 2.4 0.9 0.9 2.2zM27.4 18.7v10.1h-5.9v-9.5q0-1.9-0.7-2.9t-2.3-1.1q-1.1 0-1.9 0.6t-1.2 1.5q-0.2 0.5-0.2 1.4v9.9h-5.9q0-7.1 0-11.6t0-5.3l0-0.9h5.9v2.6h0q0.4-0.6 0.7-1t1-0.9 1.6-0.8 2-0.3q3 0 4.9 2t1.9 6z“/></svg>mitteilen&#160;</a></li> <li class=„shariff-button whatsapp shariff-nocustomcolor shariff-mobile c11“><a href=„whatsapp:send?text=Grundlagen%20der%20Statistik%3A%20Der%20Satz%20von%20Bayes%20https%3A%2F%2Fwissenschafts-thurm.de%2Fgrundlagen-der-statistik-der-satz-von-bayes%2F“ title=„Bei Whatsapp teilen“ aria-label=„Bei Whatsapp teilen“ role=„button“ rel=„noopener nofollow“ class=„shariff-link c10“ target=„\_blank“><svg width=„32px“ height=„20px“ xmlns=„http://www.w3.org/2000/svg“ viewBox=„0 0 32 32“><path fill=„#34af23“ d=„M17.6 17.4q0.2 0 1.7 0.8t1.6 0.9q0 0.1 0 0.3 0 0.6-0.3 1.4-0.3 0.7-1.3 1.2t-1.8 0.5q-1 0-3.4-1.1-1.7-0.8-3-2.1t-2.6-3.3q-1.3-1.9-1.3-3.5v-0.1q0.1-1.6 1.3-2.8 0.4-0.4 0.9-0.4 0.1 0 0.3 0t0.3 0q0.3 0 0.5 0.1t0.3 0.5q0.1 0.4 0.6 1.6t0.4 1.3q0 0.4-0.6 1t-0.6 0.8q0 0.1 0.1 0.3 0.6 1.3 1.8 2.4 1 0.9 2.7 1.8 0.2 0.1 0.4 0.1 0.3 0 1-0.9t0.9-0.9zM14 26.9q2.3 0 4.3-0.9t3.6-2.4 2.4-3.6 0.9-4.3-0.9-4.3-2.4-3.6-3.6-2.4-4.3-0.9-4.3 0.9-3.6-2.4-4.3-0.9 4.3-1.4q2.8 1.9 6.2 1.9zM14 2.2q2.7 0 5.2 1.1t4.3 2.9 2.9 4.3 1.1 5.2-1.1 5.2-2.9 4.3-4.3 2.9-5.2 1.1q-3.5 0-6.5-1.7l-7.4 2.4 2.4-7.2q-1.9-3.2-1.9-6.9 0-2.7 1.1-5.2t2.9-4.3 4.3-2.9 5.2-1.1z“/></svg>teilen&#160;</a></li> <li class=„shariff-button xing shariff-nocustomcolor c13“><a href=„https://www.xing.com/social\_plugins/share?url=https%3A%2F%2Fwissenschafts-thurm.de%2Fgrundlagen-der-statistik-der-satz-von-bayes%2F“ title=„Bei XING teilen“ aria-label=„Bei XING teilen“ role=„button“ rel=„noopener nofollow“ class=„shariff-link c12“ target=„\_blank“><svg width=„32px“ height=„20px“ xmlns=„http://www.w3.org/2000/svg“ viewBox=„0 0 25 32“><path fill=„#126567“ d=„M10.7 11.9q-0.2 0.3-4.6 8.2-0.5 0.8-1.2 0.8h-4.3q-0.4 0-0.5-0.3t0-0.6l4.5-8q0 0 0l-2.9-5q-0.2-0.4 0-0.7 0.2-0.3 0.5-0.3h4.3q0.7 0 1.2 0.8zM25.1 0.4q0.2 0.3 0 0.7l-9.4 16.7 6 11q0.2 0.4 0 0.6-0.2 0.3-0.6 0.3h-4.3q-0.7 0-1.2-0.8l-6-11.1q0.3-0.6 9.5-16.8 0.4-0.8 1.2-0.8h4.3q0.4 0 0.5 0.3z“/></svg>teilen&#160;</a></li> <li class=„shariff-button info shariff-nocustomcolor c15“><a href=„http://ct.de/-2467514“ title=„Weitere Informationen“ aria-label=„Weitere Informationen“ role=„button“ rel=„noopener nofollow“ class=„shariff-link c14“ target=„\_blank“><svg width=„32px“ height=„20px“ xmlns=„http://www.w3.org/2000/svg“ viewBox=„0 0 11 32“><path fill=„#999“ d=„M11.4 24v2.3q0 0.5-0.3 0.8t-0.8 0.4h-9.1q-0.5 0-0.8-0.4t-0.4-0.8v-2.3q0-0.5 0.4-0.8t0.8-0.4h1.1v-6.8h-1.1q-0.5 0-0.8-0.4t-0.4-0.8v-2.3q0-0.5 0.4-0.8t0.8-0.4h6.8q0.5 0 0.8 0.4t0.4 0.8v10.3h1.1q0.5 0 0.8 0.4t0.3 0.8zM9.2 3.4v3.4q0 0.5-0.4 0.8t-0.8 0.4h-4.6q-0.4 0-0.8-0.4t-0.4-0.8v-3.4q0-0.4 0.4-0.8t0.8-0.4h4.6q0.5 0 0.8 0.4t0.4 0.8z“/></svg>info&#160;</a></li> </ul></div> </html>

1)

$0,05 \cdot 0,95 + (0,95 \cdot 0,05$

From:

<https://schnipsl.qgelm.de/> - **Qgelm**

Permanent link:

[https://schnipsl.qgelm.de/doku.php?id=wallabag:grundlagen-der-statistik\\_-der-satz-von-bayes](https://schnipsl.qgelm.de/doku.php?id=wallabag:grundlagen-der-statistik_-der-satz-von-bayes)

Last update: **2021/12/06 15:24**

